6. Федорчук В. А. Апроксимація трансцендентних передатних функцій гіперболічного типу ланцюговими дробами / В. А. Федорчук, В. А. Іванюк // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(28). — Херсон : ХНТУ, 2007. — С. 353—358.

In this paper the method of chain-fractional approximations for constructing fractional-rational approximating models of objects with distributed parameters on the example of simulated diving tow underwater objects is study.

Key words: *transfer function, objects with distributed parameters, chain fractions, approximation, towing underwater objects.*

Отримано: 16.06.2009

УДК 539.3

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Методом інтегральних перетворень розв'язано задачу математичного моделювання стаціонарних температурних полів в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах.

Ключові слова: *рівняння Пуассона, крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Проблеми математичного моделювання реальних фізичних процесів, зокрема процесів теплопровідності для кусково-однорідних середовищ у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат становлять значний теоретичний, практичний та економічний інтерес [1—5]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків двовимірних та тривимірних лінійних температурних задач присвячені монографії [6—9]. Зокрема, в [9] розглянуто випадок напівобмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндрично-кругових середовищ. Необмежені двоскладові та тришарові просторові середовища розглянуто у працях [10—13]. У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки математичних моделей стаціонарних процесів теплопровідності (крайових задач) для напівобмежених кусково-однорідних середовищ у просторовій декартовій системі координат.

Постановка задачі. Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному напівобмеженому $(n+1)$-шаровому просторовому середовищі математично зводиться до побудови обмеженого на множині

$$\Omega_3 = \{(x,y,z) \big| (x,y) \in \Omega_2 = \langle a;b\rangle \times \langle c;d\rangle;$$
$$z \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1};l_j); l_0 \ge 0, l_{n+1} = +\infty\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [14, 15]

$$\left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T_j - \chi_j^2 T_j = -f_j(x,y,z); z \in I_j; j = \overline{1,n+1} \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(x,y), \frac{\partial^p T_{n+1}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty} = 0; p = 0,1, \quad (2)$$

умовами неідеального теплового контакту [16]

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_k - T_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0; k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (3)$$

та відповідними крайовими умовами на межі Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, $a_{zj} \ge 0$ — коефіцієнти температуропровідності у напрямках координатних осей x, y, z ($j = \overline{1, n+1}$); $\chi_j^2 \ge 0$ — коефіцієнти дисипації теплової енергії; $f(x,y,z) = \{f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), ..., f_{n+1}(x,y,z)\}$ — інтенсивність теплових джерел; $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0$ — деякі дійсні сталі; $g_0(x,y)$ — задана обмежена неперервна функція в області Ω_2; $R_k \ge 0$ — коефіцієнти термоопору; $\nu_k, \nu_{k+1} \ge 0$ — коефіцієнти теплопровідності; $T(x,y,z) = \{T_1(x,y,z), T_2(x,y,z), ..., T_{n+1}(x,y,z)\}$ — шукана температура.

1. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $(0;+\infty)\times(0;b)\times\{z \in \mathrm{I}_n^+\}$

Розглянемо область $\Omega_2 = (0;+\infty)\times(0;b)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)T_j\Big|_{x=0} = \omega_j(y,z), \frac{\partial^k T_j}{\partial x^k}\Big|_{x=+\infty} = 0; k=0,1; j=\overline{1,n+1} \qquad (4)$$

щодо змінної x та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)T_j\Big|_{y=0} = g_{1j}(x,z), \left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)T_j\Big|_{y=b} = g_{2j}(x,z); j=\overline{1,n+1} \qquad (5)$$

щодо змінної y, де $p \ge 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_j(y,z) = pT_j^c(y,z)$, $T_j^c(y,z)$ — температура середовища на поверхні $x=0$. $h_1 \ge 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=0$; $g_{1j}(x,z) = h_1 T_j^{c1}(x,z)$, $T_j^{c1}(x,z)$ — температура середовища на поверхні $y=0$; $h_2 \ge 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $y=b$; $g_{2j}(x,z) = h_2 T_j^{c2}(x,z)$, $T_j^{c2}(x,z)$ — температура середовища на поверхні $y=b$.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 6].

До задачі (1)—(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі щодо змінної x [17]:

$$F_{+x}\left[g(x)\right] = \int_0^{+\infty} g(x)K_x(x,\sigma)dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \qquad (6)$$

$$F_{+x}^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma \equiv g(x), \qquad (7)$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2 g}{dx^2}\right] = -\sigma^2\tilde{g}(\sigma) + K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\Big|_{x=0}, \qquad (8)$$

де ядро перетворення

$$K_x(x,\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x) + p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (6) внаслідок тотожності (8) крайовій задачі (1)—(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3' = \left\{(y,z)\;\middle|\; y\in(0;b); z\in \mathrm{I}_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \tilde{T}_j - \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + \chi_j^2 \right) \tilde{T}_j = -\tilde{F}_j \left(\sigma, y, z \right);$$

$$z \in \mathrm{I}_j; \; j = \overline{1, n+1} \qquad (9)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{T}_1 \Bigg|_{z=l_0} = \tilde{g}_0 \left(\sigma, y \right), \; \frac{\partial^p \tilde{T}_{n+1}}{\partial z^p} \Bigg|_{z=+\infty} = 0, \; p = 0, 1, \qquad (10)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1 \right) \tilde{T}_j \Bigg|_{y=0} = \tilde{g}_{1j} \left(\sigma, z \right), \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2 \right) \tilde{T}_j \Bigg|_{y=b} = \tilde{g}_{2j} \left(\sigma, z \right);$$

$$j = \overline{1, n+1} \qquad (11)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \frac{\partial}{\partial z} + 1 \right) \tilde{T}_k - \tilde{T}_{k+1} \right] \Bigg|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\nu_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial z} - \nu_{k+1} \frac{\partial \tilde{T}_{k+1}}{\partial z} \right) \Bigg|_{z=l_k} = 0; \; k = \overline{1, n}, \end{cases} \qquad (12)$$

де

$$\tilde{F}_j \left(\sigma, y, z \right) = \tilde{f}_j \left(\sigma, y, z \right) + a_{xj}^2 K_x \left(0, \sigma \right) \omega_j \left(y, z \right); \; j = \overline{1, n+1}.$$

До задачі (9)—(12) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $\left[0; b \right]$ щодо змінної y [17]:

$$\Lambda_{yk} \left[g \left(y \right) \right] = \int_0^b g \left(y \right) \nu_k \left(y \right) dy \equiv g_k, \qquad (13)$$

$$\Lambda_{yk}^{-1} \left[g_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\nu_k \left(y \right)}{\left\| \nu_k \right\|^2} \equiv g \left(y \right), \qquad (14)$$

$$\Lambda_{yk} \left[\frac{d^2 g}{dy^2} \right] = -\gamma_k^2 g_k + \nu_k \left(0 \right) \left(-\frac{dg}{dy} + h_1 g \right) \Bigg|_{y=0} + \nu_k \left(b \right) \left(\frac{dg}{dy} + h_2 g \right) \Bigg|_{y=b}, \qquad (15)$$

де ядро перетворення

$$\nu_k \left(y \right) = \frac{\gamma_k \cos \left(\gamma_k y \right) + h_1 \sin \left(\gamma_k y \right)}{\sqrt{\gamma_k{}^2 + h_1^2}},$$

$$\left\| \nu_k \right\|^2 \equiv \int_0^b \nu_k^2 \left(y \right) dy = \frac{b}{2} + \frac{\left(h_1 + h_2 \right) \left(\gamma_k^2 + h_1 h_2 \right)}{2 \left(\gamma_k^2 + h_1^2 \right) \left(\gamma_k^2 + h_2^2 \right)},$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\mathrm{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1 + h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (9)—(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на I_n^+ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\right] \tilde{T}_{jk}(\sigma, z) = -\tilde{F}_{jk}(\sigma, z);\ z \in I_j;$$

$$j = \overline{1, n+1} \tag{16}$$

з крайовими умовами

$$\left.\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0\right)\tilde{T}_{1k}\right|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(\sigma),\ \left.\frac{d^p \tilde{T}_{n+1,k}}{\partial z^p}\right|_{z=+\infty} = 0,\ p = 0,1 \tag{17}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left.\left[\left(R_p \dfrac{d}{dz} + 1\right)\tilde{T}_{pk} - \tilde{T}_{p+1,k}\right]\right|_{z=l_p} = 0, \\ \left.\left(\nu_p \dfrac{d\tilde{T}_{pk}}{dz} - \nu_{p+1} \dfrac{d\tilde{T}_{p+1,k}}{dz}\right)\right|_{z=l_p} = 0,\ p = \overline{1, n}, \end{cases} \tag{18}$$

де

$$\tilde{F}_{jk}(\sigma, z) = \tilde{f}_{jk}(\sigma, z) + a_{xj}^2 K_k(0, \sigma)\omega_{ik}(z) +$$
$$+ a_{yj}^2 \nu_k(0)\tilde{g}_{1j}(\sigma, z) + a_{yj}^2 \nu_k(b)\tilde{g}_{2j}(\sigma, z);\ j = \overline{1, n+1}.$$

Задача (16)—(18) розглянута в [18]. Побудований методом інтегрального перетворення Фур'є на декартовій півосі з n точками спряження [6] єдиний обмежений розв'язок задачі визначають функції

$$\tilde{T}_{jk}(\sigma, z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\tilde{F}}_k(\sigma, \beta) V_j(z, \beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} \Omega_n(\beta)\, d\beta -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0, \beta) V_j(z, \beta)\tilde{g}_{0k}(\sigma)}{\alpha_{11}^0\left(\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2\right)} \Omega_n(\beta)\, d\beta;\ j = \overline{1, n+1}. \tag{19}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{T}_{jk}(\sigma, z)$, визначених формулами (19), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та F_{+x}^{-1}, одержуємо функції

$$T_j(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)f_k(\xi,\eta,\zeta)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\int_0^{+\infty}\int_0^b W_j(x,\xi,y,\eta,z)g_0(\xi,\eta)d\xi d\eta+$$

$$+a_{xj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xjk}(x,y,\eta,z,\zeta)\omega_k(\eta,\zeta)\sigma_k d\eta d\zeta+$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}^1(x,\xi,y,z,\zeta)g_{1k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta+$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}^2(x,\xi,y,z,\zeta)g_{2k}(\xi,\zeta)\sigma_k d\xi d\zeta;\ j=\overline{1,n+1},\quad (20)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (20) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)=\frac{2}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{V_j(z,\beta)V_k(\zeta,\beta)}{\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+a_{y1}^2\gamma_r^2+\chi_1^2}\times$$

$$\times\Omega_n(\beta)K_x(x,\sigma)K_x(\xi,\sigma)\frac{\nu_r(y)\nu_r(\eta)}{\|\nu_r\|^2}d\sigma d\beta;\ j,k=\overline{1,n+1},$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j(x,\xi,y,\eta,z)=-\sigma_1 a_1^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}(x,\xi,y,\eta,z,l_0),$$

абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}(x,y,\eta,z,\zeta)=E_{jk}(x,0,y,\eta,z,\zeta),$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^1(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{jk}(x,\xi,y,0,z,\zeta)$$

та правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^2(x,\xi,y,z,\zeta)=E_{jk}(x,\xi,y,b,z,\zeta)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(5).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{xjk}\left(x,y,\eta,z,\zeta\right)$, $W^1_{yjk}\left(x,\xi,y,z,\zeta\right)$, $W^2_{yjk}\left(x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(x,y,z\right)$, визначені формулами (20), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (4), (5) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зазначимо, що якщо функції $f_j\left(x,y,z\right),\omega_j\left(y,z\right),g_{1j}\left(x,z\right)$, $g_{2j}\left(x,z\right)$ задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (20) буде також класичним розв'язком крайової задачі (1)—(5).

Зауваження 1. У випадку $a^2_{xj}=a^2_{yj}=a^2_{zj}\equiv a^2_j\geq 0$ формули (20) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному напівобмеженому $\left(n+1\right)$-шаровому середовищі.

Зауваження 2. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (20) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. При $R_k=0\left(k=\overline{1,n}\right)$ безпосередньо з формул (20) одержуємо структуру стаціонарного температурного поля у випадках здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 4. Параметри $\alpha^0_{11},\beta^0_{11}$ дозволяють виділяти із формул (20) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha^0_{11}=0,\beta^0_{11}=1,g_0\left(x,y\right)\alpha^0_{11}T_0\left(x,y\right)$, $T_0\left(x,y\right)$ — температура середовища на поверхні $z=l_0$), 2-го роду $\left(\alpha^0_{11}=-1,\beta^0_{11}=0\right)$ та 3-го роду ($\alpha^0_{11}=-1,\beta^0_{11}\equiv h>0,$ h — коефіцієнт теплообміну через поверхню $z=l_0$).

Зауваження 5. Параметри $p,h_j\left(j=1,2\right)$ дозволяють виділяти із формул (20) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0$, $y=0$, $y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 6. Аналіз розв'язку (20) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(x,y,z\right),\omega_j\left(y,z\right),g_{1j}\left(x,z\right),g_{2j}\left(x,z\right)$ $\left(j=\overline{1,n+1}\right)$ та $g_0\left(x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

2. Математичне моделювання процесу теплопровідності в кусково-однорідному середовищі $\left(0;a\right)\times\left(0;b\right)\times\left\{z\in \mathrm{I}_n^+\right\}$

Розглянемо область $\Omega_2=\left(0;a\right)\times\left(0;b\right)$. У цьому випадку на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p_1\right)T_j\Bigg|_{x=0}=\omega_{1j}(y,z),\left(\frac{\partial}{\partial x}+p_2\right)T_j\Bigg|_{x=a}=\omega_{2j}(y,z);\ j=\overline{1,n+1} \quad (21)$$

щодо змінної *x* та крайові умови (5) щодо змінної *y*, де $p_1\geq 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=0$; $\omega_{1j}\left(y,z\right)=p_1T_j^{c1}\left(y,z\right)$, $T_j^{c1}\left(y,z\right)$ — температура середовища на поверхні $x=0$; $p_2\geq 0$ — коефіцієнт теплообміну через поверхню $x=a$; $\omega_{2j}\left(y,z\right)=$ $=p_2T_j^{c2}\left(y,z\right)$, $T_j^{c2}\left(y,z\right)$ — температура середовища на поверхні $x=a$.

Припустимо, що розв’язок задачі (1)—(3), (21), (5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [17, 6].

До задачі (1)—(3), (21), (5) застосуємо інтегральне перетворення Фур’є на декартовому сегменті $\left[0;a\right]$ щодо змінної x [17]:

$$Z_{xm}\left[g\left(x\right)\right]=\int_0^a g\left(x\right)w_m\left(x\right)dx\equiv g_m\ , \quad (22)$$

$$Z_{xm}^{-1}\left[g_m\right]=\sum_{m=1}^{\infty}g_m\frac{w_m\left(x\right)}{\left\|w_m\right\|^2}\equiv g\left(x\right), \quad (23)$$

$$Z_{xm}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\delta_m^2g_m+w_m\left(0\right)\left(-\frac{dg}{dx}+p_1g\right)\Bigg|_{x=0}+w_m\left(a\right)\left(\frac{dg}{dx}+p_2g\right)\Bigg|_{x=a}, \quad (24)$$

де ядро перетворення

$$w_m\left(x\right)=\frac{\delta_m\cos\left(\delta_mx\right)+p_1\sin\left(\delta_mx\right)}{\sqrt{\delta_m^2+p_1^2}},$$

$$\left\|w_m\right\|^2=\int_0^a w_m^2\left(x\right)dx=\frac{a}{2}+\frac{\left(p_1+p_2\right)\left(\delta_m^2+p_1p_2\right)}{2\left(\delta_m^2+p_1^2\right)\left(\delta_m^2+p_2^2\right)},$$

$\left\{\delta_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\delta a) = \frac{\delta^2 - p_1 p_2}{\delta(p_1 + p_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Z_{xm} за правилом (22) внаслідок тотожності (24) крайовій задачі (1)—(3), (21), (5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $\Omega_3' = \{(y,z) \mid y \in (0;b); z \in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T_{jm} - \left(a_{xj}^2 \delta_m^2 + \chi_j^2\right) T_{jm} = -F_{jm}(y,z);\ z \in I_j \quad (25)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_{1m}\Big|_{z=l_0} = g_{0m}(y);\ \frac{\partial^p T_{n+1,m}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty} = 0;\ p = 0, 1, \quad (26)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) T_{jm}\Big|_{y=0} = g_{1jm}(z);\ \left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) T_{jm}\Big|_{y=b} = g_{2jm}(z) \quad (27)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \frac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_{pm} - T_{p+1,m}\right]\Big|_{z=l_p} = 0, \\ \left(\nu_p \frac{\partial T_{pm}}{\partial z} - \nu_{p+1} \frac{\partial T_{p+1,m}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_p} = 0,\ p = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (28)$$

де

$$F_{jm}(y,z) = f_{jm}(y,z) + a_{xj}^2 w_m(0) \omega_{1j}(y,z) + a_{xj}^2 w_m(a) \omega_{2j}(y,z).$$

До задачі (25)—(28) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[0;b]$ щодо змінної y. Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (13) внаслідок тотожності (15) крайовій задачі (25)—(28) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині I_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_{zj}^2 \frac{d^2}{dz^2} - \left(a_{xj}^2 \delta_m^2 + a_{yj}^2 \gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\right] T_{jmk}(z) = -F_{jmk}(z);$$

$$z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \quad (29)$$

з крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0\right) T_{1mk}\Bigg|_{z=l_0} = g_{0mk}\,; \quad \frac{d^p T_{n+1,mk}}{dz^p}\Bigg|_{z=+\infty} = 0\,; \;\; p = 0,1 \qquad (30)$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_p \dfrac{d}{dz} + 1\right) T_{pmk} - T_{p+1,mk}\right]\Bigg|_{z=l_p} = 0, \\ \left(v_p \dfrac{dT_{pmk}}{dz} - v_{p+1} \dfrac{dT_{p+1,mk}}{dz}\right)\Bigg|_{z=l_p} = 0, \; p = \overline{1, n}, \end{cases} \qquad (31)$$

де

$$F_{jmk}(z) = f_{jmk}(z) + a_{xj}^2 w_m(0)\,\omega_{1jk}(z) + a_{xj}^2 w_m(a)\,\omega_{2jk}(z) +$$
$$+ a_{yj}^2 v_k(0)\, g_{1jm}(z) + a_{yj}^2 v_k(b)\, g_{2jm}(z)\,; \;\; j = \overline{1, n+1}\,.$$

З точністю до позначень крайова задача на спряження (29)—(31) збігається із задачею (16)—(18). Отже, відповідно до формул (19), єдиний обмежений розв’язок задачі (29)—(31) визначають функції

$$T_{jmk}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{F}_{mk}(\beta) V_j(z,\beta)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2} \Omega_n(\beta)\, d\beta -$$
$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma_1 a_1^2 V_1(l_0,\beta) V_j(z,\beta)\, g_{0mk}}{\alpha_{11}^0 \left(\beta^2 + a_{x1}^2 \sigma^2 + a_{y1}^2 \gamma_k^2 + \chi_1^2\right)} \Omega_n(\beta)\, d\beta; \; j = \overline{1, n+1}. \qquad (32)$$

Застосувавши послідовно до функцій $T_{jmk}(z)$, визначених формулами (32), обернені оператори Λ_{yk}^{-1} та Z_{xm}^{-1}, одержуємо функції

$$T_j(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}(x,\xi,y,\eta,z,\zeta)\, f_k(\xi,\eta,\zeta)\, \sigma_k\, d\xi\, d\eta\, d\zeta +$$
$$+ \int_0^a \int_0^b W_j(x,\xi,y,\eta,z)\, g_0(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ a_{xj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xjk}^1(x,y,\eta,z,\zeta)\, \omega_{1k}(\eta,\zeta)\, \sigma_k\, d\eta\, d\zeta +$$
$$+ a_{xj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^b \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{xjk}^2(x,y,\eta,z,\zeta)\, \omega_{2k}(\eta,\zeta)\, \sigma_k\, d\eta\, d\zeta +$$

$$+a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yjk}^1 \left(x, \xi, y, z, \zeta\right) g_{1k} \left(\xi, \zeta\right) \sigma_k d\xi d\zeta +$$

$$+a_{yj}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^a \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{yjk}^2 \left(x, \xi, y, z, \zeta\right) g_{2k} \left(\xi, \zeta\right) \sigma_k d\xi d\zeta;\ j = \overline{1, n+1}, \quad (33)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в розглянутому середовищі.

У формулах (33) застосовано компоненти:
фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{jk}\left(x, \xi, y, \eta, z, \zeta\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{V_j\left(z, \beta\right) V_k\left(\zeta, \beta\right)}{\beta^2 + a_{x1}^2 \delta_r^2 + a_{y1}^2 \gamma_p^2 + \chi_1^2} \times$$

$$\times \Omega_n\left(\beta\right) \frac{w_r\left(x\right) w_r\left(\zeta\right)}{\left\|w_r\right\|^2} \frac{v_p\left(y\right) v_p\left(\eta\right)}{\left\|v_p\right\|^2} d\beta;\ j, k = \overline{1, n+1},$$

аплікатної матриці Гріна

$$W_j\left(x, \xi, y, \eta, z\right) = -\sigma_1 a_1^2 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} E_{j1}\left(x, \xi, y, \eta, z, l_0\right),$$

лівої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}^1\left(x, y, \eta, z, \zeta\right) = E_{jk}\left(x, 0, y, \eta, z, \zeta\right),$$

правої абсцисної матриці Гріна

$$W_{xjk}^2\left(x, y, \eta, z, \zeta\right) = E_{jk}\left(x, a, y, \eta, z, \zeta\right),$$

лівої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^1\left(x, \xi, y, z, \zeta\right) = E_{jk}\left(x, \xi, y, 0, z, \zeta\right)$$

та правої ординатної матриці Гріна

$$W_{yjk}^2\left(x, \xi, y, z, \zeta\right) = E_{jk}\left(x, \xi, y, b, z, \zeta\right)$$

еліптичної крайової задачі (1)—(3), (21), (5).

З використанням властивостей фундаментальних функцій $E_{jk}\left(x, \xi, y, \eta, z, \zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(x, \xi, y, \eta, z\right)$, $W_{xjk}^1\left(x, y, \eta, z, \zeta\right)$, $W_{xjk}^2\left(x, y, \eta, z, \zeta\right)$, $W_{yjk}^1\left(x, \xi, y, z, \zeta\right)$, $W_{yjk}^2\left(x, \xi, y, z, \zeta\right)$, безпосередньо перевіряється, що функції $T_j\left(x, y, z\right)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), крайові умови (2), (21), (5) та умови спряження (3) в сенсі теорії узагальнених функцій [19].

Зауважимо, що якщо функції $f_j\left(x, y, z\right), \omega_{1j}\left(x, z\right), \omega_{2j}\left(x, z\right)$, $g_{1j}\left(y, z\right), g_{2j}\left(y, z\right)$ задовольняють умови спряження (3) і вихідні дані задачі мають необхідну гладкість [20], то розв'язок (33) буде також класичним розв'язком крайової задачі (1)—(3), (21), (5).

Зазначимо, що: 1) зауваження 1—4 поширюються на випадок розглянутої температурної задачі; 2) параметри $p_j, h_j \left(j=1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (33) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0$, $x=a$; $y=0$, $y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(x,y,z\right)$, $\omega_{1j}\left(y,z\right)$, $\omega_{2j}\left(y,z\right)$, $g_{1j}\left(x,z\right)$, $g_{2j}\left(x,z\right)$ ($j=\overline{1,n+1}$) та $g_0\left(x,y\right)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. При найбільш загальних припущеннях у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків математичних моделей стаціонарних процесів теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та вихідних даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях так і в практиці інженерних розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
2. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
3. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
4. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
5. Шилин Г. Ф. Инженерные алгоритмы решения стационарных задач теплопроводности в составных телах / Г. Ф. Шилин. — Иркутск : Изд-во ИГУ, 1983. — 115 с.
6. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
7. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
8. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
9. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.

10. Громик А. П., Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2006. — Вип. 13. — С. 52—65.
11. Громик А. П. Крайові задачі теплопровідності в необмежених двоскладових просторових областях / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2006. — Вип. 14. — С. 36—50.
12. Громик А. П.Стаціонарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2009. — Вип. 18. — С. 54—67.
13. Конет І. М. Крайові задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр., — Чернівці : Прут, 2006. — Вип.14. — С. 84—96.
14. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский — М. : Наука, 1972. — 735 с.
15. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер — М. : Наука, 1964. — 448 с.
16. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер. — М. : Мир, 1964. — 517 с.
17. Ленюк М. П. Интегральные преобразования з разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 60 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
18. Громик А. П. Інтегральні зображення розв’язків стаціонарних задач теплопровідності в напівобмежених кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наук. пр. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2009. — Вип. 2. — С. 54—65.
19. Шварц Л. Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 408 с.
20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

Method of integral transformation is solved problem of mathematical modeling stationary thermal field in semi limited cobbed-homogeneous space areas.

Key words: *equalization Puassona, regional conditions, terms of interface, integral transformations, main upshots.*

Отримано: 09.09.2009